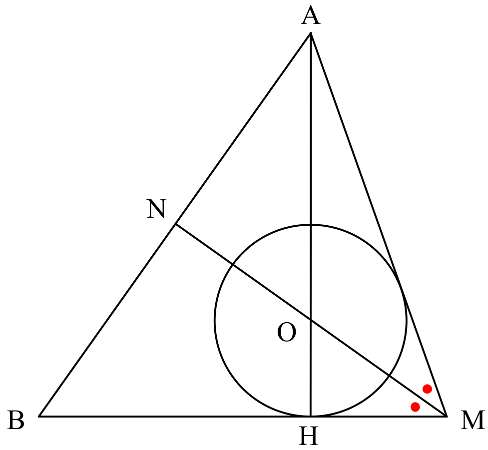
図形と計量

要点の整理

9． 正四面体の計量

補充

AO：OH＝3：1 の別解



半直線 MO と辺 AB の交点を N とすると，

MN が∠AMB の二等分線であることと MA：MB＝1:1 であることより，

AN：NB＝1:1

また，BM：MH＝3：1

△ABH と点 M,O,N を通る直線についてメネラウスの定理の定理を適用すると，

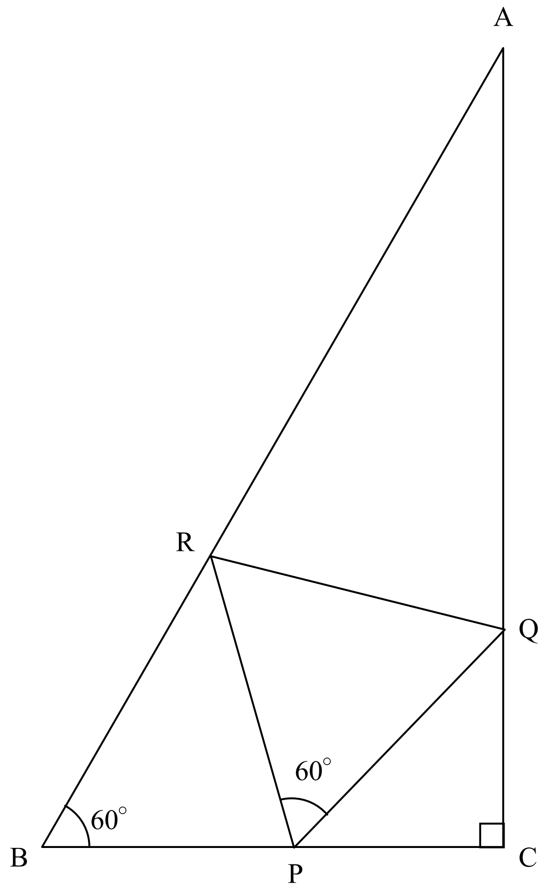
$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MH}\cdot\frac{HO}{OA}=1$ より，

$$\frac{AO}{OH}=\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MH}$$
$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{1}$$
$$=\frac{3}{1}$$

よって，AO：OH＝3：1

2　正弦定理

2　演習題



(1)

別解

$\angle \mathrm{RPC} = \angle \mathrm{RPQ} + \angle \mathrm{CPQ} = 60° + \angle \mathrm{CPQ}$　・・・①

$\angle \mathrm{RPC}$ は△RBP の外角だから，$\angle \mathrm{RPC} = \angle \mathrm{RBP} + \angle \mathrm{BRP} = 60° + \angle \mathrm{BRP}$　・・・②

①，②より，$\angle \mathrm{CPQ} = \angle \mathrm{BRP}$

5　三角形の形状決定

別解：角度に統一して解いてみた。

(1)

条件より，$b=\dfrac{a\sin A}{\sin B}$

これを $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$（正弦定理）に代入すると，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a\sin A}{\sin^2 B}$　$\therefore \sin^2 A=\sin^2 B$

これと $0<A<180°$ かつ $0<B<180°$ かつ $0<A+B<180°$ より，$A=B$

よって，△ABC は CA＝CB の二等辺三角形

(2)

$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=k$ とおくと，$a=k\cos A$，$b=k\cos B$

これを $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$（正弦定理）に代入すると，$\dfrac{k\cos A}{\sin A}=\dfrac{k\cos B}{\sin B}$　$\therefore \dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{1}{\tan B}$

これと $0<A<180°$ かつ $0<B<180°$ より，$A=B$

よって，△ABC は CA＝CB の二等辺三角形

(3)

$\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos B}=k$ とおくと，$a=k\cos B$，$b=k\cos A$

これを $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$（正弦定理）に代入すると，$\dfrac{k\cos B}{\sin A}=\dfrac{k\cos A}{\sin B}$

$\therefore \cos A\sin A=\cos B\sin B$

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$

これと $0<2A<360°$ かつ $0<2B<360°$ かつ $0<2A+2B<360°$ より，

$2A=2B$ または $2A=180°-2B$

$2A=2B$ のとき

$A=B$ より，△ABC は CA＝CB の二等辺三角形

$2A=180°-2B$ のとき

$A+B=90°$ より，$C=180°-(A+B)=90°$

よって，△ABC は∠C＝90° の直角三角形

6　円に内接する四角形

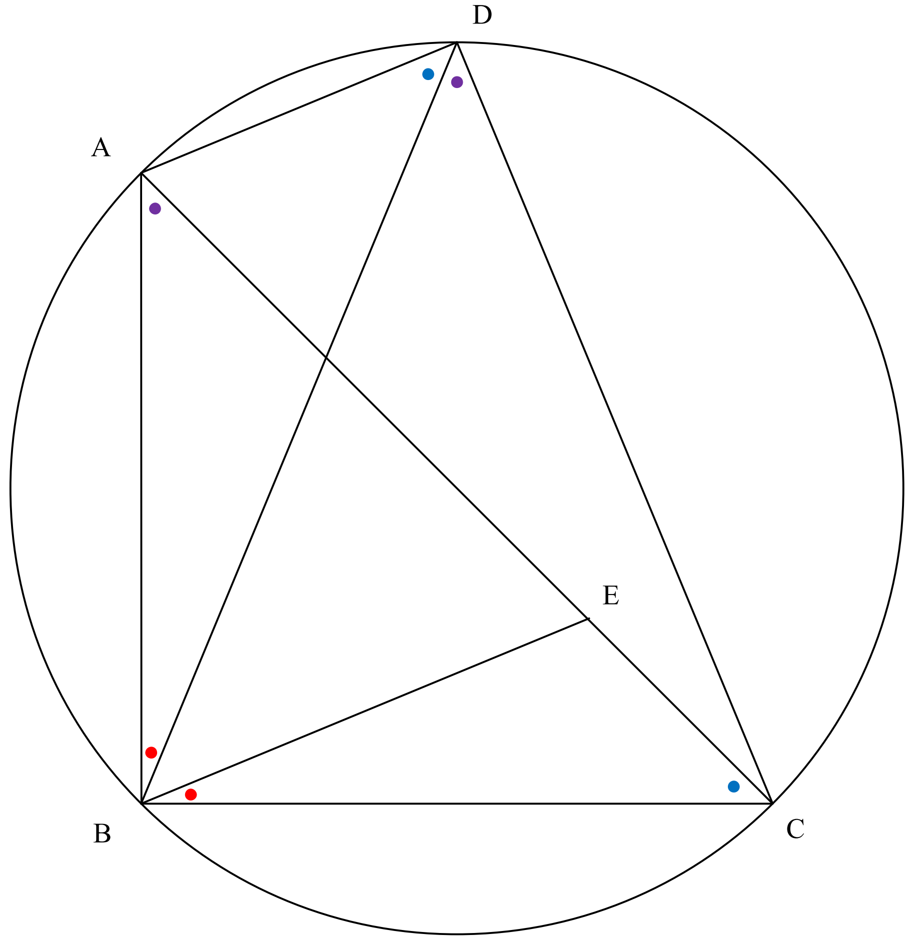
補足

トレミーの定理

弦の長さを求めるのに便利

円に内接する四角形 ABCD について，

対角線の長さの積＝対辺長さの積の和，すなわち $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ が成り立つ。



証明

対角線 AC 上に∠ABD＝∠CBE となる点 E をとる。

△ABD ∽ △EBC より，AD：EC＝BD：BC

$\therefore BD \cdot EC = BC \cdot DA$　・・・①

△DBC ∽ △ABE より，DC：AE＝BD：BA

$\therefore BD \cdot AE = AB \cdot CD$　・・・②

①＋②より，

$BD \cdot (AE + EC) = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

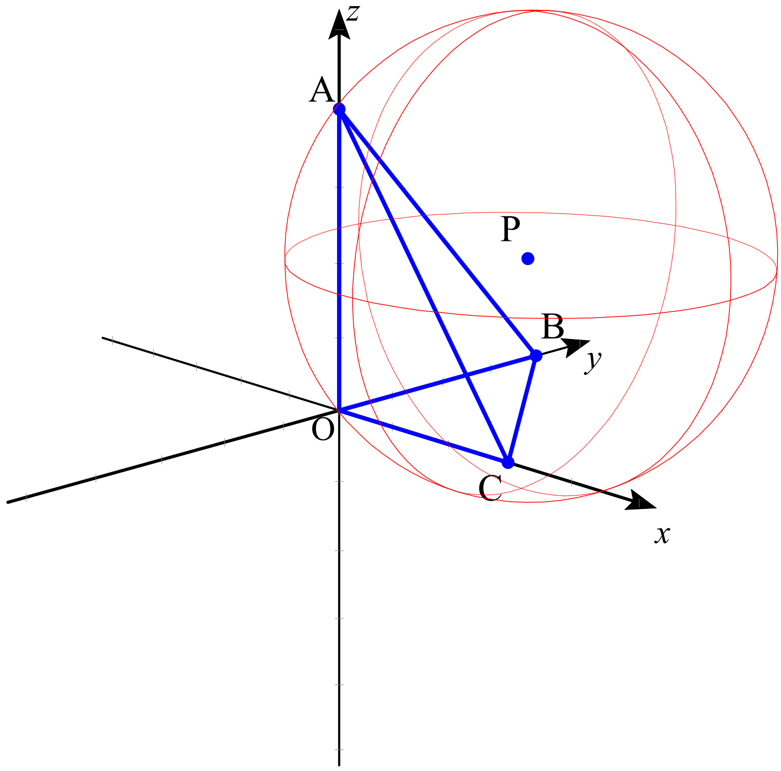
よって，

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

7　内接球の半径

7　演習題

(3)別解（略解）



外接球の中心を $\mathrm{P}(s,t,u)$ とし，$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(0,0,a)$，$\mathrm{B}(0,4,0)$，$\mathrm{C}(3,0,0)$ とすると，

$\mathrm{PO}^2=\mathrm{PA}^2=\mathrm{PB}^2=\mathrm{PC}^2$ より，

$s^2+t^2+u^2=s^2+t^2+(u-a)^2=s^2+(t-4)^2+u^2=(s-3)^2+t^2+u^2$

$s^2+t^2+u^2=(s-3)^2+t^2+u^2$ より，　$s=\dfrac{3}{2}$

$s^2+t^2+u^2=s^2+(t-4)^2+u^2$ より，　$t=2$

$s^2+t^2+u^2=s^2+t^2+(u-a)^2$，　$a>0$ より，　$u=\dfrac{a}{2}$

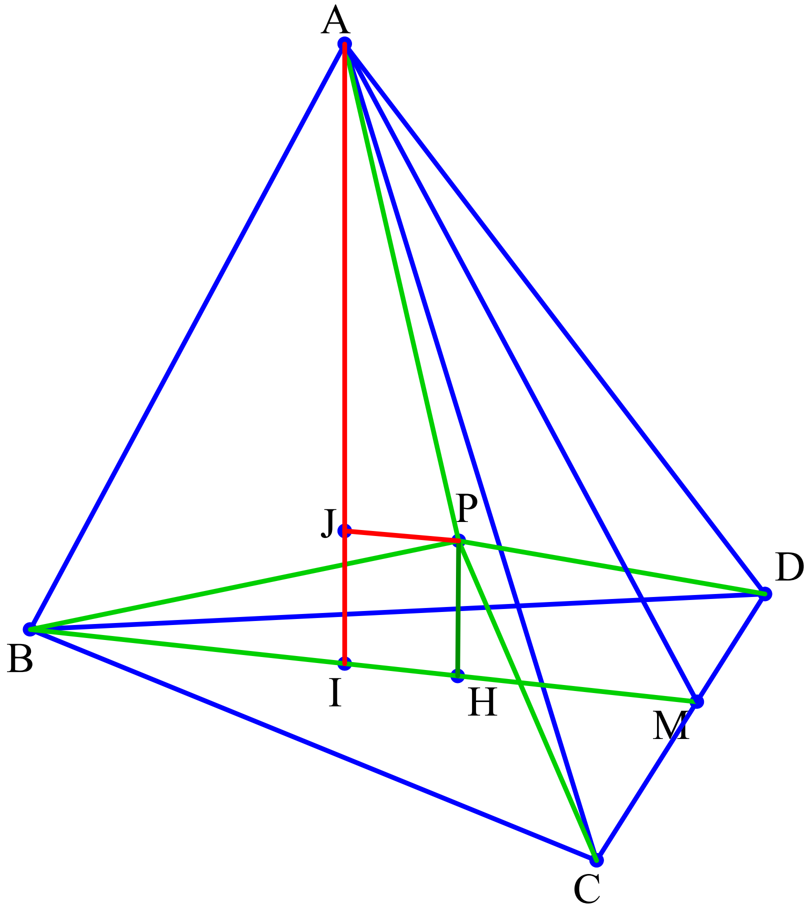
$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},2,\dfrac{a}{2}\right)$

よって，外接球の半径 $=\mathrm{PO}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{a^2+25}}{2}$

9　外接球の半径

9　演習題

別解 1（略解）



外接球の中心を P，P から△BCD に下ろした垂線の足を H，CD の中点を M とすると，
△BCD は正三角形だから，H は△BCD の外心かつ重心である。

よって，$\mathrm{BH}=\dfrac{2}{3}\mathrm{BM}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　・・・①

PB は外接球の半径だから，これを r とすると，

直角三角形 PBH について三平方の定理より，$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{PB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{r^2-\dfrac{4}{3}}$　・・・②

A から△BCD に下ろした垂線の足を I とすると，
△AIC≡△AID より，I は BM 上にあり，

△ABM は一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形だから，

$\mathrm{BI}=\dfrac{\mathrm{BM}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　・・・③

$\mathrm{AI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{3}{2}$　・・・④

①，③より，$\mathrm{HI}=\mathrm{BH}-\mathrm{BI}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　・・・⑤

ここで，P から AI に下ろした垂線の足を J とすると，
△APJ は∠J＝90° の直角三角形であり，
PA は外接球の半径だから $\mathrm{PA}=r$

②，④より，$\mathrm{AJ}=\mathrm{AI}-\mathrm{JI}=\mathrm{AI}-\mathrm{PH}=\dfrac{3}{2}-\sqrt{r^2-\dfrac{4}{3}}$

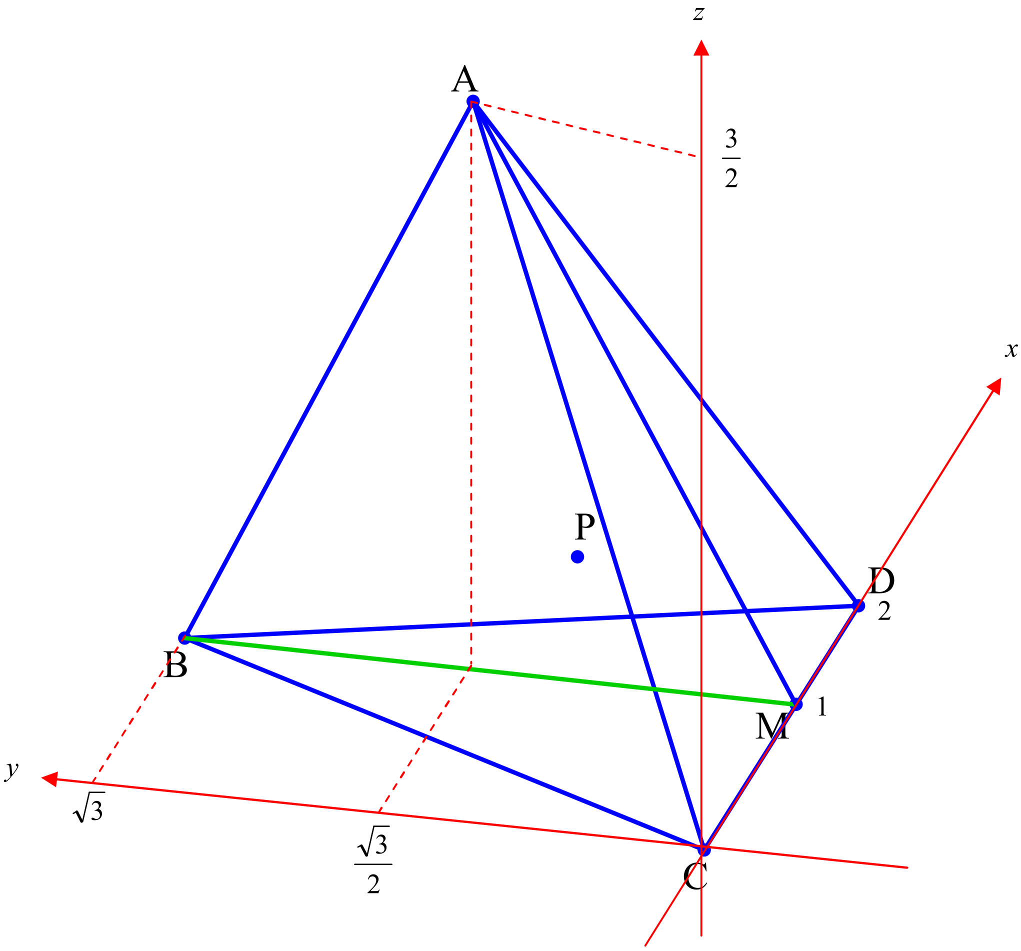
①，③より，$\mathrm{PJ}=\mathrm{HI}=\mathrm{BH}-\mathrm{BI}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

よって，三平方の定理より，

$$r^2=\left\{\frac{3}{2}-\sqrt{r^2-\frac{4}{3}}\right\}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$r^2=\frac{9}{4}-3\sqrt{r^2-\frac{4}{3}}+r^2-\frac{4}{3}+\frac{1}{12}\quad\therefore\sqrt{r^2-\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}\quad\therefore r=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

別解 2（略解）



外接球の中心を P，CD の中点を M とすると，

△ABM は一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形，△BCD は一辺の長さが 2 の正三角形だから，

xyz 直交座標系に $\mathrm{B}\left(1,\sqrt{3},0\right)$，$\mathrm{C}\left(0,0,0\right)$，$\mathrm{D}\left(2,0,0\right)$ をとると，$\mathrm{A}\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ である。

$\mathrm{P}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ とおくと，PA,PB,PC,PD は外接球の半径だから，$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PB}^2=\mathrm{PC}^2=\mathrm{PD}^2$

$$\therefore (\alpha-1)^2+\left(\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)^2=(\alpha-1)^2+\left(\beta-\sqrt{3}\right)^2+\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha-2)^2+\beta^2+\gamma^2$$

$$\therefore \alpha=1,\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\gamma=\frac{1}{3}$$

よって，求める半径$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$